

جبر خطی

۱- ماتریس‌های متقارن و یادیستقارن را تعریف کرد. و از هر کدام مثال بزنید.

حل: ماتریس مربعی A ، متقارن گویند اگر با ترانپوز خود برابر باشد $A=A^t$

مثال $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

ماتریس مربعی B ، یادیستقارن گویند اگر با ترانپوز ترانپوز خود برابر باشد $B=-B^t$

مثال $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

۲- اگر $A_{3 \times 3}$ و $\det A = 2$ باشد، آنگاه حاصل $\det((3A^t)^2)$

باید
حل: $\det((3A^t)^2) = \det(9(A^t)^2) = 9^3 \det(A^t)^2 = 9^3 (\det A)^2 = 9^3 \times 2^2 = 2916$

۳- اگر λ_1, λ_2 مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ باشند، آنگاه $\lambda_1^3 + \lambda_2^3$

باید
حل: $\lambda_1^3 + \lambda_2^3 = (\lambda_1 + \lambda_2)^3 - 3\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)$ $\text{tr} A = 5, \det A = 2$

$\lambda_1\lambda_2 = \det A$ و $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr} A$

$= (\text{tr} A)^3 - 3(\det A)(\text{tr} A) = 5^3 - 3(-2)(5) = 155$

۴- باروش کوس بردن دستگاه سه معادله سه مجهول را حل کنید

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 18 \\ 4x + 5y + 6z = 24 \\ 3x + y - 2z = 4 \end{cases}$$

حل:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ -3y = 6 \\ -z = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

۵- مستقل خطی بودن مجموعه

$$\left\{ (0, 3, -2), (2, 3, 0), (-1, 0, 0) \right\}$$

بررسی کنید.

$$a_1(0, 3, -2) + a_2(2, 3, 0) + a_3(-1, 0, 0)$$

حل:

$$\begin{cases} 2a_2 = 0 \rightarrow a_2 = 0 \\ 3a_1 + 3a_2 + a_3 = 0 \rightarrow 3a_1 + a_3 = 0 \\ -2a_1 - a_3 = 0 \rightarrow -2a_1 = -a_3 \rightarrow a_1 = a_3 \end{cases}$$

پس مستقل خطی نیست.

۶- آیا سه بردار $\vec{v}_1 = \langle 2, -2, 3 \rangle$ و $\vec{v}_2 = \langle 4, 2, 1 \rangle$ و $\vec{v}_3 = \langle 5, -2, 4 \rangle$ هم صفحه‌اند؟

شرط هم صفحه بودن: $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = 0$

حل:

$$\vec{v}_2 \times \vec{v}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 22\vec{j} - 14\vec{k}$$

$$\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = \langle 2, -2, 3 \rangle \cdot \langle 4, -22, -14 \rangle = -4 \neq 0$$

پس هم صفحه نیستند

۷- اگر $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد و نمایشگر تابع خطی $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

باشد، آنگاه ضابطه تعریف تابع خطی f را تعیین کنید.

$$f(x) = f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x + 2z \\ 3x + y + 2z \\ -x + 2y + 3z \end{bmatrix}$$

حل:

۸- توابع خطی $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ و $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ را به صورت زیر

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -x + 2y \\ x - 3y \end{bmatrix}, \quad g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - y \\ y \\ 5x + y \end{bmatrix}$$

توابع خطی $-2f$ و $f - 3g$ را تعیین کنید.

$$-2f \Rightarrow -2f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = -2 \begin{bmatrix} x \\ -x + 2y \\ x - 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x \\ 2x - 4y \\ -2x + 6y \end{bmatrix}$$

حل:

$$f - 3g \Rightarrow f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) - 3g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2x + 3y \\ -x - 4y \\ -5x - 4y \end{bmatrix}$$

9- به روش کبلی همیلتون، معکوس ماتریس
 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ را بیابید.

حل:

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & -4 \\ 0 & -4-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow f(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 12\lambda - 44 = 0$$

$$\rightarrow f(A) = -A^3 + 3A^2 + 12A - 44I = 0 \xrightarrow{\times A^{-1}} -A^2 + 3A + 12I - 44A^{-1} = 0$$

$$\rightarrow -44A^{-1} = A^2 - 3A - 12I \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-44} (A^2 - 3A - 12I)$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -22 \\ 2 & 14 & 2 \\ 7 & 2 & 19 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-44} \left(\begin{bmatrix} 0 & -2 & -22 \\ 2 & 14 & 2 \\ 7 & 2 & 19 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} - 12 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{11} & \frac{11}{11} & \frac{5}{11} \\ -\frac{1}{11} & -\frac{5}{11} & \frac{2}{11} \\ -\frac{2}{11} & -\frac{5}{11} & \frac{4}{11} \end{bmatrix}$$

۱- خطی بودن تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ و فضا

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x \\ 2y \\ x+y \end{bmatrix}$$

کد تابع خطی است

۱) $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \rightarrow f(x+y) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)$ حل:

$$= f\left(\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3(x_1+y_1) \\ 2(x_2+y_2) \\ (x_1+y_1) + (x_2+y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 2x_2 \\ x_1+x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3y_1 \\ 2y_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix}$$

$$= f(x) + f(y)$$

۲) $f(kx) = f\left(k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{bmatrix}\right) = k f(x)$

پس f کد تابع خطی است.